S. Richter, 2019, März 2021

Das Gleichheitszeichen in der Mathematik

Das Gleichheitszeichen „=” wird in der Mathematik in (wenigstens) fünf verschiedenen Bedeutungen verwendet (in der Informatik würde man von einem „überladenem Operator”[1] sprechen).

Betrachten wir dazu das Beispiel „f(x)=g(x)”.

1. <u>Bedeutung: Definition, Setzung, Zuweisung, Festlegung</u>

   In diesem Fall ist eine Funktion g(x) gegeben (z.B. durch die Funktions*gleichung* g(x)=2x−2).

   Mit „f(x)=g(x)” soll dann ausgedrückt werden: Die linke Seite „f(x)” der „Gleichung“ erhält ihre Bedeutung durch die rechte Seite „g(x)” *zugewiesen*, d.h. in der üblichen Bedeutung: die Funktion f soll eine exakte Kopie der Funktion g sein.
   Das kommt in dieser Form eher selten vor, etwas nachvollziehbarer ist vielleicht das verwandte Beispiel „f(x)=g(x − 4)” (die Funktion f soll eine um 4 Einheiten nach rechts verschobene Kopie der Funktion g sein) oder das Beispiel „f(x)=3•g(x)” (die Funktion f wird definiert als eine um den Faktor 3 gestreckte Kopie der Funktion g).
   Sehr typisches Beispiel: x=2 (der Variablen x wird der Wert 2 zugewiesen).

   Das Zeichen „=” wird hier nicht symmetrisch verwendet, man kann die beiden Seiten der „Gleichung” nicht einfach vertauschen: typischerweise erhält die linke Seite der „Gleichung” ihre Bedeutung durch die rechte Seite *zugewiesen*. Besser erkennbar wird das durch die Verwendung eines asymmetrischen Zeichens, wie z.B.:
   „x ← 2” (in diversen Programmiersprachen) oder
   „x := 2” (üblich in der akademischen Mathematik).
   Statt eines speziellen Gleichheitszeichens wird in Verbindung mit dem Standardgleichheitszeichen (=) häufig das Wörtchen „sei” verwendet, bspw. „sei x=2” oder „sei f(x)=3x−4”.

2. <u>Bedeutung: Forderung, Bedingung</u>

   Im Beispiel „f(x)=g(x)” ist damit gemeint: es gibt zwei verschiedene Funktionen f und g. Eventuell haben sie Schnittpunkte und durch die Gleichung „f(x)=g(x)” soll ausgedrückt werden: Finde den Wert (oder die Werte) x, für den (oder die) die beiden Funktionen den gleichen Wert haben. Die Gleichung „f(x)=g(x)” repräsentiert also eine *Bedingung* (an x).
   Um das klarer zum Ausdruck zu bringen, kann man ein „!” über das Gleichheitszeichen setzen:
   $f(x) \overset{!}{=} g(x)$.
   (In diesem Zusammenhang sucht man, wie gesagt, nach *speziellen Werten der Variablen x*. Während „x” für die Variable namens x steht, werden *Werte* dieser Variablen typischerweise mit einem Index versehen, z.B. x_0, x_S, x_W usw. Insofern wäre es noch konsequenter, wenn man den Sachverhalt folgendermaßen ausdrücken würde: $f(x_0) \overset{!}{=} g(x_0)$, um wirklich alle Missverständnisse auszuschließen.)

3. <u>Bedeutung: Feststellung, Aussage, Relation</u>

   Man betrachte folgendes Szenario:
   Gegeben ist eine Funktion f(x) := 2x+5 (definiert wird also eine Funktion namens „f”, die von einer unabhängigen Variablen namens „x” abhängt, *durch den Term* „2x+5”).
   Des Weiteren ist eine Funktion namens g gegeben *durch die verbale Beschreibung*: „g ist diejenige lineare Funktion, deren Graph durch die Punkte P(−3| −1) und Q(4|13) verläuft.”

   Es ist zunächst nicht offensichtlich, stellt sich dann aber heraus, dass beide Definitionen dieselbe Funktion definieren, dass also f(x) *identisch mit* („=“) g(x) ist.
   In diesem Fall handelt es sich bei „f(x)=g(x)” um eine *Feststellung, Beziehung, Relation* oder *Aussage* (welche im Beispiel wahr ist, prinzipiell aber auch falsch sein könnte).

1 https://de.wikipedia.org/wiki/%C3%9Cberladen

4. Entsprechung, Korrespondenz
   Wir alle verstehen „Gleichungen" der Art:
   1kg (Bananen) = 1.99€
   1 US$ = 0.85€ [am 28.03.2021]
   1€=1.95583 DM [Definition vom 01.01.1999]
   $360°=2π$
   Oder auch, bei einem Dreieck mit den Seiten a, b, c:
   a=2, b=3, c=4
   In all diesen Fällen wird keine *Identiät* sondern eine *Entsprechung*, *Korrespondenz* ausgedrückt. Niemand würde ernsthaft behaupten, dass ein Dollar gleich 0.84 Euro ***ist***, einfach deshalb, weil ein Dollar nun mal kein Euro ***ist***, und auch kein (Bruch)Teil davon.
   Ebenso gilt es zu unterscheiden zwischen der *Seite* eines Dreiecks, bei welcher es es sich um ein Objekt der Geometrie handelt, und dessen *Länge*, bei der es sich um eine *(Maß)Zahl* handelt.
   (Die Mathematik kennt im Wesentlichen zwei Erkenntnismethoden: Diskriminieren, d.h. unterscheiden von Objekten, die man („normalerweise") als „gleich" ansieht, und Identifizieren, d.h. Objekte als gleich ansehen, die es nicht sind.)

5. Wertgleichheit
   Es „gilt": $3=3.00=03=\frac{27}{9}=2.\overline{999}=\sqrt[3]{3^3}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}=\frac{\pi\cdot 3}{\pi}=3\cdot\frac{\tan(x)}{\tan(x)}=3+\sqrt{x-1}-\sqrt{x-1}=....$
   Das Gleichheitszeichen soll hier ausdrücken, dass all diese Terme den *gleichen Wert* haben, obwohl diese *Terme* offensichtlich *ungleich* sind. Was der Mensch relativ leicht einsieht, muss bspw. einem *CAS*[2] erst einmal mühsam beigebracht werden! (Stichwort: term rewriting[3])
   Die letzten beiden Terme haben „ihren ‚Witz' in der Tatsache", dass man den *Wert* eines Terms nicht ändert, wenn man ihn mit 1 multipliziert („erweitert") oder indem man 0 addiert. Problematisch hierbei ist offensichtlich, dass die Terme tan(x) und $\sqrt{x-1}$ gar nicht für jeden Wert von x „existieren"; wenn man diesen Gedanken weiterverfolgt und / oder (beliebig viele) weitere „Einsen[4] multipliziert" oder „Nullen addiert", dann lautet die seltsame Schlußfolgerung, dass die Zahl 3 manchmal (d.h. für bestimmte Werte von x) existiert und manchmal nicht.
   Abituraufgaben geben sich redliche Mühe, Ambivalenzen zu vermeiden. Meiner Erinnerung nach musste man in Sachsen bei einem Abitur einmal die Funktion $f(x)=\ln(x^2)$ betrachten mit dem Definitionsbereich $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$. Da aber bekanntlich gilt (hier geht es gerade nicht um Wertgleichheit) $\ln(x^2)=2\bullet\ln(x)$, halbiert sich durch die Anwendung eines Logarithmengesetz' der Definitionsbereich der Funktion! Welche Version soll der arme Schüler denn nun verwenden?

Historisches
"Robert Recorde[5] (1510–1558): Erfinder des Gleichheitszeichens. Dass man sich auch noch nach Jahrhunderten an den walisischen Mathematiker und Mediziner Robert Recorde erinnern wird, hat er einem genialen Einfall zu verdanken: In seinem Buch »The Whetstone of Witte« (Der Wetzstein des Verstandes) aus dem Jahr 1557 verwendete er – um die lästige Wiederholung des Wortes »aequalis« zu vermeiden – ein Zeichen, das aus einem Paar gleich langer paralleler Strecken besteht: »=«. Er wählte dieses Symbol für die Gleichheit zweier Größen, weil – wie er schrieb – keine anderen zwei Dinge gleicher sein können."[...][6]

Ausblick
1. Ich bin durchaus nicht der Erste, dem aufgefallen ist, dass „das" Gleichheitszeichen in verschiedenen Bedeutungen verwendet wird.[7]
2. ***Ist*** ein Kreis eine Ellipse?[8]

2 https://de.wikipedia.org/wiki/Computeralgebrasystem
3 https://de.wikipedia.org/wiki/Termersetzungssystem
4 Mit „Eins" und „Null" sind hier letzlich Elemente von *Gruppen* gemeint.
5 https://de.wikipedia.org/wiki/Robert_Recorde
6 https://www.spektrum.de/wissen/robert-recorde-1510-1558-erfinder-des-gleichheitszeichens/1781948
7 https://www.quantamagazine.org/with-category-theory-mathematics-escapes-from-equality-20191010/
8 https://en.wikipedia.org/wiki/Circle%E2%80%93ellipse_problem